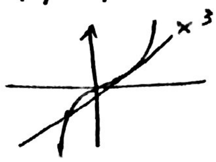
ΛΥΣΕΙΣ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑΤΟΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

7/11/2020

$\boxed{A3}$ α) Ψ β)



$\boxed{A4}$ α) Σ β) Λ γ) Λ δ) Λ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

$\boxed{B1}$ $f'(0) = \frac{1}{2}$

- $f'(x) = \dfrac{\alpha(x+\alpha) - \alpha x - \alpha}{(x+\alpha)^2} = \dfrac{\cancel{\alpha x} + \alpha^2 - \cancel{\alpha x} - \alpha}{(x+\alpha)^2} = \dfrac{\alpha^2 - \alpha}{(x+\alpha)^2}$

Είναι: $f'(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha^2 - \alpha}{\alpha^2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{\alpha - 1}{\alpha} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 2\alpha - 2 = \alpha$

$\Leftrightarrow \boxed{\alpha = 2}$ οπότε $f(x) = \dfrac{2x+2}{x+2}$, $x \neq -2$

$\boxed{B2}$ Έστω, $x_1, x_2 \in A_f$ με $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{2x_1+2}{x_1+2} = \dfrac{2x_2+2}{x_2+2}$

$\Leftrightarrow (2x_1+2)(x_2+2) = (x_1+2)(2x_2+2) \Leftrightarrow$

$\cancel{2x_1x_2} + 4x_1 + 2x_2 + \cancel{4} = \cancel{2x_1x_2} + 2x_1 + 4x_2 + \cancel{4}$

$2x_1 = 2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ οπότε f "1-1"

Θέτουμε $f(x) = y \Leftrightarrow 2x + 2 = yx + 2y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x - yx = 2y - 2 \Leftrightarrow x(2-y) = 2y - 2 \overset{y \neq 2}{\Leftrightarrow} x = \dfrac{2y-2}{2-y}$

άρα $f^{-1}(x) = \dfrac{2x-2}{2-x}$, $x \neq 2$

$\boxed{B3}$ $\lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{1}{x+2}(2x+2) = -\infty\,(-4+2) = +\infty$

άρα $\boxed{x=-2}$ ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ ΑΣΥΜ.

• $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x+2}{x+2} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} 2 = 2$

• $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$ άρα $\boxed{y=2}$ ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΑΣΥΜ. στο $\pm\infty$

$\boxed{B4}$ $\dfrac{2x+2}{x+2} = \dfrac{e^x}{x+1} \iff (2x+2)(x+1) - e^x(x+2) = 0$

Θεωρώ $h(x) = (2x+2)(x+1) - e^x(x+2)$

$h(-2) = (-4+2)(-1) - e^{-2}(-2+2) = -2\cdot(-1) = 2 > 0$

$h(-1) = 0 - e^{-1}(-1+2) = -\dfrac{1}{e} < 0$

άρα $h(-2)h(-1) < 0$ Θ. Bolzano ...

Θέμα Γ

$\boxed{Γ1}$ $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} + \lambda x\right) = \lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}} + \lambda\right)$

$= +\infty\,(1+\lambda)$

Αν $\lambda+1>0$ τότε $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$

Αν $\lambda+1<0$ τότε $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty$

Αν $\lambda=-1$ τότε $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) \overset{0\cdot\infty}{=} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\cancel{x^2}+2x+2-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2x+2}+x}$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)} = \dfrac{2}{2} = 1 \in \mathbb{R}$

άρα $\boxed{\lambda=-1}$

$\boxed{\Gamma_2}$ • $\lambda = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+2}-x}{x}$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)}{x} = -2$

• $\beta = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-\lambda x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2}-x+2x\right)$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2}+x\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}+2x+2-\cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+2x+2}-x} = \dots$

$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+1\right)} = \frac{2}{-2} = -1$

άρα $\boxed{(\varepsilon): y = -2x-1}$ ΠΛΑΓΙΑ ΑΣΥΜΠΤΩΤΗ ΣΤΟ $-\infty$

$\boxed{\Gamma_3}$ α) Έστω $x^2+2x+2 > (x+1)^2 \Leftrightarrow$

$x^2+2x+2 > x^2+2x+1 \Leftrightarrow 2>1$ ισχύει

β) $f(x) > -2x-1$

Έχουμε από α) ότι $x^2+2x+2 > (x+1)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+2} > \sqrt{(x+1)^2} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+2} > |x+1|$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+2} > -x-1 \overset{-x}{\Leftrightarrow} \sqrt{x^2+2x+2}-x > -2x-1$

Αφού, $x\to-\infty$ $|x+1| = -x-1$

$\Leftrightarrow f(x) > -2x-1$

$\boxed{Γ4}$

• $f'(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}-1=\dfrac{x+1-\sqrt{x^2+2x+2}}{\sqrt{x^2+2x+2}}$

(Είναι, $x^2+2x+2>(x+1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+2}>|x+1| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+2}>|x+1|\geq x+1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+2x+2}>x+1$

άρα $f'(x)<0$ οπότε $f \downarrow$ στο $\mathbb{R}$) ΕΠΙΠΛΕΟΝ

• $f''(x)=\dots=\dfrac{1}{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}$

ΘΕΜΑ Δ

$\boxed{Δ1}$ ▸ $g(x)=\frac{1}{x}$ παρ/μη ως ρητή με $g'(x)=-\frac{1}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}^*$

• $g'(1)=-1$, $g(1)=1$ (ε): $y-1=-(x-1) \Rightarrow y-1=-x+1$

$\Leftrightarrow \boxed{y=-x+2}$ (εφ) της C_f στο $(1,1)$

▸ $h(x)=x^2-3x+3$, $x>0$ παρ/μη ως πολ/κή με $h'(x)=2x-3$

• $h(1)=1-3+3=1$

• $h'(1)=2-3=-1$

άρα (ε): $y=-x+2$ κοινή (εφ) των C_g κ' C_h στο $(1,1)$

$\boxed{Δ2}$ α) $\frac{1}{x}+x\geq 2 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 1+x^2\geq 2x \Leftrightarrow 1-2x+x^2\geq 0 \Leftrightarrow (1-x)^2\geq 0$ ισχύει

β) Επειδή η f είναι γν. μονότονη στο $\mathbb{R}$ τότε $f\uparrow$ ή $\downarrow$ στο $\mathbb{R}$ έστω $f\downarrow$ στο $\mathbb{R}$

$1<2 \underset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} f(1)>f(2) \Leftrightarrow 1>e^{\alpha}+\frac{1}{e^{\alpha}}$ Άτοπο αφού

• Για $x>0$ $\frac{1}{x}+x\geq 2$ Για $x=e^{\alpha}$: $e^{-\alpha}+e^{\alpha}\geq 2>1$

άρα $f\uparrow$

$\boxed{Δ3}$ Θεωρω $K(x) = \frac{1}{x} - e^x$, $x \neq 0$

- $K(1) = 1 - e < 0$
- $K(1/2) = 2 - e^{1/2} = 2 - \sqrt{e} > 0$

Αρα απο Θ. Bolzano η εξισωση $K(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = e^x$ εχει μια τουλαχιστον ριζα στο $(1/2, 1)$

Για $\boxed{x>0}$: $K'(x) = -\frac{1}{x^2} - e^x < 0$ αρα $K \downarrow$ στο $(0, +\infty)$

Οποτε η εξισωση $K(x)=0$ εχει μοναδικη ριζα οταν $x \in (1/2, 1)$

Για $\boxed{x<0}$: $\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{x} < 0 \\ e^x > 0 \end{array}\right.$ αρα $e^x > \frac{1}{x} \Leftrightarrow K(x) < 0$ $\forall x < 0$

$\boxed{Δ4}$ Εινaι οτι: $f(f^{-1}(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$

ΠΑΡΑΓΩΓΙΖΟΥΜΕ ΚΑΤΑ ΜΕΛΗ: $\left(f(f^{-1}(x))\right)' = (x)' \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1}$ (1)

- $(f^{-1})'(x) = λ_η \rightarrow$ Ο ΣΥΝΤΕΛ. ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΤΗΣ $(ε_φ)$ ΤΗΣ $C_{f^{-1}}$ ΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ $Γ(x, f^{-1}(x))$
- $f'(f^{-1}(x)) = λ_ζ \rightarrow$ Ο ΣΥΝΤΕΛ. ΔΙΕΥΘΥΝΣΗΣ ΤΗΣ $(ε_φ)$ ΤΗΣ C_f ΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ $Δ(f^{-1}(x), x)$

$$λ_η \cdot λ_ζ = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) \underset{(1)}{=} 1$$

$\boxed{15}$ $-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$

$\overset{+2}{\Leftrightarrow} \quad 1 \leq 2+\sigma\upsilon\nu x \leq 3$

$\Leftrightarrow \quad f(1) \leq f(2+\sigma\upsilon\nu x) \leq f(3)$

$f \nearrow$

$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} \leq g(x) f(2+\sigma\upsilon\nu x) \leq \frac{1}{x} f(3)$

$\cdot g(x) > 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ κ' $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} f(3) = 0$

άρα κ.π. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) f(2+\sigma\upsilon\nu x) = 0$